

1 Zijde AB is twee keer zo groot als zijde AD en zijde AC is twee keer zo groot als zijde AE .
Dus $\triangle ABC$ is een vergroting van $\triangle ADE$ met factor 2.

2a $\left. \begin{array}{l} \angle BAD = \angle EBC = 90^\circ \\ \angle ABD = \angle BEC \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BEC \text{ (hh)}$

$\triangle ABD$	$AB = 8$	$AD = 15$	$BD = 17$
$\triangle BEC$	$BE = \dots$	$BC = \dots$	$EC = 13\frac{3}{5}$

2b $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow BD = 17$.
 $BE = 8 \cdot 13\frac{3}{5} : 17 = 6,4$ en $AE = AB - EB = 8 - 6,4 = 1,6$.

8^2+15^2	289	$8 \cdot (13+3/5) / 17$	6.4
$\sqrt{(289)}$	17	8-Ans	1.6

3a $\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \\ \angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ACB \text{ (hh)}$
 $\left. \begin{array}{l} \angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ (hh)}$
 $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CDB$.

$\triangle ADC$	$AD = \dots$	$AC = 15$	$DC = \dots$
$\triangle ACB$	$AC = 15$	$AB = 17$	$CB = 8$
$\triangle CDB$	$CD = \dots$	$CB = 8$	$DB = \dots$

3b $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow AB = 17$.
 $CD = 8 \cdot 15 : 17 = 7\frac{1}{17}$; $AD = 15 \cdot 15 : 17 = 13\frac{4}{17}$ en
 $BD = 8 \cdot 8 : 17 = 3\frac{13}{17}$ of $BD = AB - AD = 17 - 13\frac{4}{17} = 3\frac{13}{17}$.

8^2+15^2	289	$8 \cdot 15 / 17$	$15 \cdot 15 / 17$
$\sqrt{(289)}$	17	Ans-7*Frac	Ans-13*Frac

$8 \cdot 8 / 17$	3.764705882
Ans-3*Frac	$13/17$
$17 - (13+4/17)$	3.764705882

4 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle BED = \angle BAC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BED \sim \triangle BAC \text{ (hh)}$

$\triangle BED$	$BE = 12$	$BD = 13$	$ED = 5$
$\triangle BAC$	$BA = 20$	$BC = \dots$	$AC = \dots$

$BD^2 = DE^2 + BE^2 \Rightarrow BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BD = 13$.
 $AC = 5 \cdot 20 : 12 = 8\frac{1}{3}$; $BC = 13 \cdot 20 : 12 = 21\frac{2}{3}$ en
 $CE = BC - BE = 21\frac{2}{3} - 12 = 9\frac{2}{3}$.

5^2+12^2	169	$5 \cdot 20 / 12$	$13 \cdot 20 / 12$
$\sqrt{(169)}$	13	Ans-8*Frac	Ans-21*Frac

5 $\left. \begin{array}{l} \angle PQD = \angle BQC \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle ADB = \angle DBC \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle QDP \sim \triangle QBC \text{ (hh)}$

7^2+24^2	625	$25 \cdot 7 / 17$	$10 \cdot 29411765$
$\sqrt{(625)}$	25	Ans-10*Frac	$5/17$

$\triangle QDP$	$QD = \dots$	$QP = \dots$	$DP = 7$
$\triangle QBC$	$QB = \dots$	$QC = \dots$	$BC = 10$
samen	$BD = \dots$	$PC = 25$	17

$PC^2 = PD^2 + DC^2 \Rightarrow PC^2 = 7^2 + 24^2 = 625 \Rightarrow PC = 25$.
 $QP = 25 \cdot 7 : 17 = 10\frac{5}{17}$.

6a $\left. \begin{array}{l} \angle FAD + \angle ADF = 90^\circ \\ \angle CDE + \angle ADF = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FAD = \angle CDE$
 $\left. \begin{array}{l} \angle F = \angle E = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle DEC \text{ (hh)}$

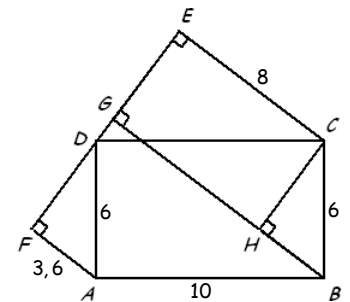
10^2-8^2	36	$6 \cdot 6 / 10$	3.6
$\sqrt{(36)}$	6		

$\triangle AFD$	$AF = \dots$	$AD = 6$	$FD = \dots$
$\triangle DEC$	$DE = 6$	$DC = 10$	$EC = 8$

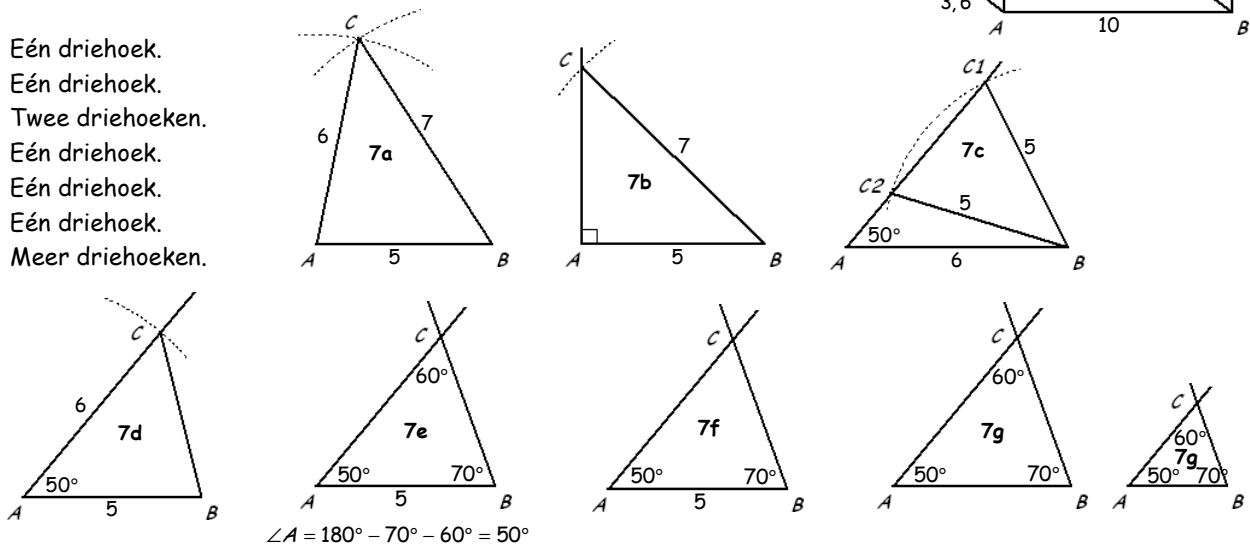
$DE^2 = DC^2 - EC^2 \Rightarrow DE^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow DE = 6$.
 $AF = 6 \cdot 6 : 10 = 3,6$

6b Teken $CH \perp BG$.
 $AF \parallel BH$ (beide loodrecht op FE)
 $AD \parallel BC$ ($ABCD$ is een rechthoek) $\Rightarrow \angle FAD = \angle HBC$
 $\left. \begin{array}{l} \angle AFD = \angle BHC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle BHC \text{ (hh)}$

Omdat $AD = BC = 6$ is dan ook $BH = AF = 3,6$.
 $HG = CE = 8$. Dus $BG = BH + HG = 3,6 + 8 = 11,6$.

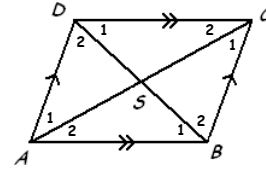


- 7a Eén driehoek.
- 7b Eén driehoek.
- 7c Twee driehoeken.
- 7d Eén driehoek.
- 7e Eén driehoek.
- 7f Eén driehoek.
- 7g Meer driehoeken.

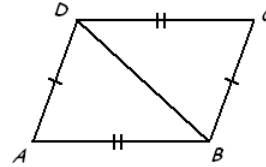


$\angle A = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$

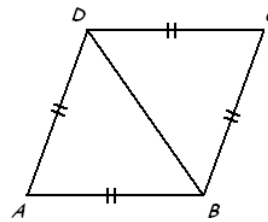
- 8 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$. (zie de figuur hiernaast)
 $\left. \begin{array}{l} \angle A_2 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B_1 = \angle D_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ AB = CD \text{ (voorbeeld blz. 121)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CDS \text{ (HZH)} \Rightarrow AS = CS \text{ en } BS = DS.$
 Dus de diagonalen AC en BD delen elkaar middendoor.



- 9 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = CD$ en $AD = BC$. (zie hiernaast)
 Teken diagonaal BD .
 $\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ BD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle A = \angle C.$

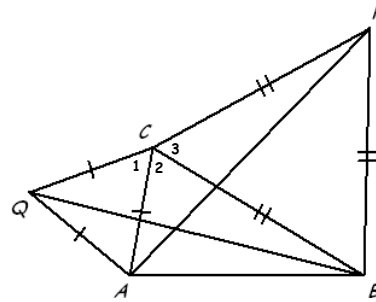


- 10a Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = CD = AD$. (zie hiernaast)
 Teken diagonaal BD .
 $\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ BD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ZZZ)}.$
 Dus $\angle ABD = \angle CDB$, zodat $AB \parallel CD$ (Z-hoeken).
 Ook $\angle ADB = \angle CBD$, zodat $AD \parallel BC$ (Z-hoeken).



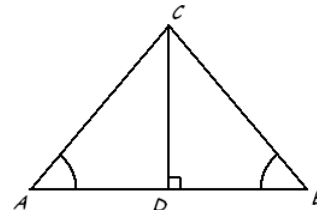
- 10b $\left. \begin{array}{l} DA = DC \\ BA = BC \\ BD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DAB \cong \triangle DCB \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD \text{ en } \angle ADB = \angle CDB.$
 Geheel analoog toon je aan dat de andere diagonaal ook de hoeken middendoor deelt.

- 11 Teken de stralen MA en MB .
 $\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (straal cirkel)} \\ MN = MN \\ \angle ANM = \angle BNM = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNA \cong \triangle MNB \text{ (ZZR)} \Rightarrow AN = BN.$



- 12 $\left. \begin{array}{l} \angle C_{12} = \angle C_{23} = 60^\circ + \angle C_2 \\ AC = QC \\ PC = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACP \cong \triangle QCB \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AP = QB.$

- 13 Gegeven: $\triangle ABC$ met $\angle A = \angle B$. Teken $CD \perp AB$. (zie de figuur hiernaast)
 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B \text{ (gegeven)} \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \\ CD = CD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ (HZH)} \Rightarrow AC = BC.$



- 14 $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A_3 + \angle A_2 \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_3.$

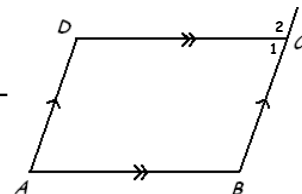
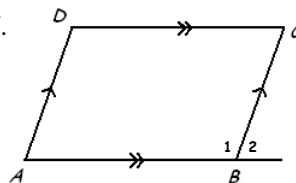
- 15 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$.
 Te bewijzen: $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$.

Bewijs: Verleng zijde AB (aan de kant van B).

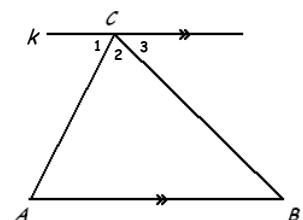
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B_2 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle C = \angle B_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle C.$$

Verleng zijde BC (aan de kant van C).

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle C_2 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle D = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle B = \angle D.$$



- 16 Gegeven: Driehoek ABC .
 Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.
 Bewijs: Teken lijn k door C evenwijdig aan AB . (dan $\angle C_2 = \angle C$)
 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C_2 = 180^\circ.$
 Dus in driehoek ABC geldt: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$



17 Gegeven: Driehoek ABC . (zie figuur 8.13)
Te bewijzen: $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.
Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle A + \angle C + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle B_1 + \angle B_2 = \angle A + \angle C + \angle B_1 \Rightarrow \angle B_2 = \angle A + \angle C.$$

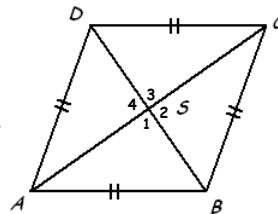
18a In opgave 10a. 18b In opgave 8.

18c Gegeven: ruit $ABCD$ met snijpunt S van de diagonalen. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $\angle S_1 = 90^\circ$.

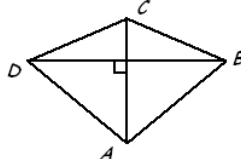
Bewijs: $ABCD$ is een ruit $\Rightarrow ABCD$ is een par(allellogra)m (zie opg. 10a) $\Rightarrow BS = DS$ (zie opg. 8).

$$\left. \begin{array}{l} AS = AS \\ BS = DS \text{ (opgave 8)} \\ AD = AB \text{ (} ABCD \text{ is een ruit)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADS \cong \triangle ABS \text{ (ZZZ)}.$$

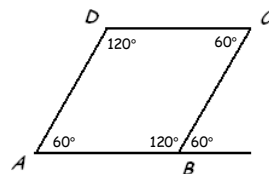
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dus } \angle S_1 = \angle S_4 \\ \angle S_1 + \angle S_4 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle S_1 + \angle S_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle S_1 = 90^\circ.$$



19 Neem als tegenvoorbeeld vlieger $ABCD$ hiernaast.
Er geldt $AC \perp BD$, maar vierhoek $ABCD$ is geen ruit.



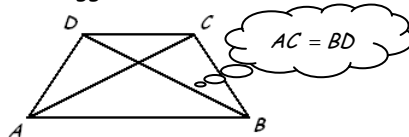
20 Neem als tegenvoorbeeld parallellogram $ABCD$ met $\angle A = 60^\circ$. (zie hiernaast)
Uit de eigenschappen van een parallellogram volgt dan $\angle A = 60^\circ$ en $\angle B = \angle D = 120^\circ$.
De buitenhoek van B is dan 60° en $\frac{\angle A + \angle C + \angle D}{3} = \frac{60^\circ + 60^\circ + 120^\circ}{3} = \frac{240^\circ}{3} = 80^\circ$.



Dus de buitenhoek van B is niet gelijk aan het derde deel van de niet-aanliggende binnenhoeken.

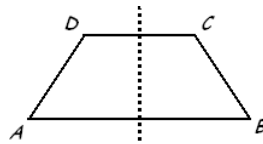
21a De stelling is niet omkeerbaar. Zie het tegenvoorbeeld hiernaast.

21b De stelling is omkeerbaar:
Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen,
dan is de vierhoek een parallellogram.

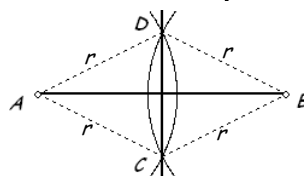


21c De stelling is omkeerbaar:
Als in $\triangle ABC$ geldt $BC^2 = AB^2 + AC^2$, dan is de driehoek rechthoekig in A .

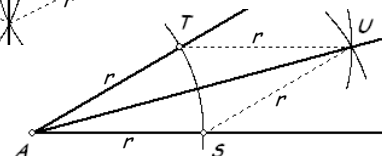
21d De stelling is niet omkeerbaar. Zie het tegenvoorbeeld hiernaast.



22 De cirkelbogen met middelpunten A en B hebben gelijke straal.
Dus $AC = CB = BD = DA = r \Rightarrow$ vierhoek $ACBD$ is een ruit.
Dus CD en AB delen elkaar loodrecht ($CD \perp AB$) middendoor.

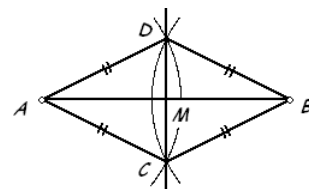


23 De cirkelbogen met middelpunten A , S en T hebben gelijke straal.
Dus $AS = AT = SU = TU = r \Rightarrow$ vierhoek $ASUT$ is een ruit.
Diaagonaal AU deelt $\angle A$ middendoor $\Rightarrow AU$ is bissectrice (hoekdeellijn) van $\angle A$.



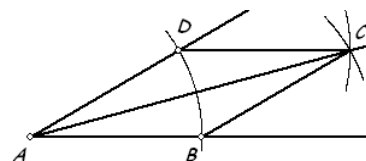
24a Gegeven: Vierhoek $ACBD$ met $AC = BC = BD = AD$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: CD is de middelloodlijn van AB .

Bewijs: Zij M het snijpunt van AB en CD .
 $AC = BC = BD = AD \Rightarrow ACBD$ is een ruit en dus ook een parallellogram.
 $AM = BM$ (parallellogram) $\Rightarrow CD$ is middelloodlijn van AB .
 $CD \perp AB$ (ruit)

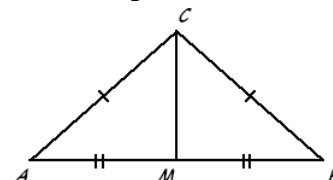


24b Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = CD = AD$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: AC is bissectrice van $\angle A$.

Bewijs: $AB = BC = CD = AD \Rightarrow ACBD$ is een ruit.
 AC is een diagonaal van ruit $ABCD$.
Dus AC deelt $\angle A$ middendoor $\Rightarrow AC$ is bissectrice van $\angle A$.



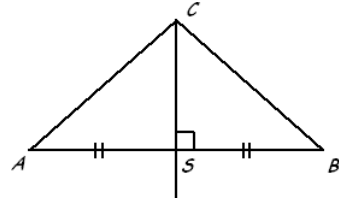
25a Gegeven: Lijnstuk AB en punt C met $AC = BC$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: C ligt op de middelloodlijn van AB .
Bewijs: Zij M het midden van AB .
(als $C = M$ dan zijn we klaar want de middelloodlijn van AB gaat door het midden van AB)



$AM = BM$
 $AC = BC$ (gegeven)
 $CM = CM$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle BMC \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle AMC = \angle BMC \\ \angle AMC + \angle BMC = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AMC = \angle BMC = 90^\circ$$

Dus C op de middelloodlijn van AB .



25b Gegeven: C ligt op de middelloodlijn van AB . (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $AC = BC$.

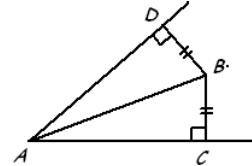
Bewijs: Zij S het snijpunt van AB en de middenloodlijn van AB .
(als $C = S$ dan zijn we klaar want S is het midden van AB)

$$\left. \begin{array}{l} AS = BS \\ CS = CS \\ \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ASC \cong \triangle BSC \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AC = BC.$$

26a Gegeven: Punt B met gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: B ligt op de bissectrice van $\angle A$.

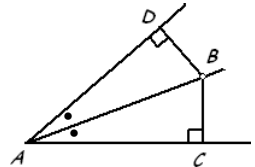
Bewijs: Teken AB en de loodlijnstukken BC en BD .

(de kortste afstand tot de overkant van een weg staat haaks op de trottoirband aan de overkant)

$$\left. \begin{array}{l} BC = BD \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \\ \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (ZZR)} \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD \Rightarrow B \text{ ligt op de bissectrice van } \angle A.$$


26b Gegeven: $\angle A$ en punt B op de bissectrice van $\angle A$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$.

Bewijs: Teken de loodlijnstukken BC en BD .

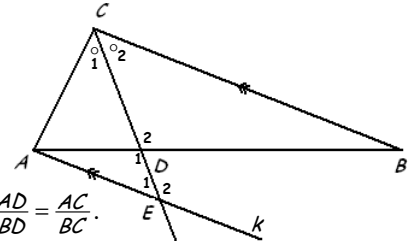
$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle BAD \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \\ \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (ZHH)} \Rightarrow BC = BD \Rightarrow B \text{ heeft gelijke afstanden tot de benen van } \angle A.$$


27 Gegeven: Driehoek ABC met bissectrice CD . (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $AD : BD = AC : BC$.

Bewijs: Teken door A een hulplijn $k \parallel BC$. (k snijdt CD in E)

$$\left. \begin{array}{l} \angle E_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D_1 = D_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EDA \sim \triangle CDB \text{ (hh)} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 = C_2 \text{ (bissectrice)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1 \Rightarrow \triangle EAC \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AE = AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$


28a Zie figuur 8.19: $\angle BAS = \frac{1}{2} \angle A = 30^\circ$ en $\cos 30^\circ = \frac{5}{AS} \Rightarrow AS = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 3\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

28b In $\triangle ASC$: $\cos \angle SAC = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{AS}{AC} = \frac{3\frac{1}{3}\sqrt{3}}{7} \neq \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \angle ASC \neq 90^\circ$.

29 Zie figuur 8.20: $\angle BFE = \angle BDC = 90^\circ$
 $\angle B = \angle B$

$\Rightarrow \triangle FBE \sim \triangle DBC \text{ (hh)} \Rightarrow DC = 2 \cdot 6 : 3 = 4.$

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AD^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AD = \sqrt{9} = 3.$

$BC^2 = DB^2 + DC^2 \Rightarrow DB^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow DB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

$AB = AD + DB = 3 + 2\sqrt{5}.$

2*6/3	4
5^2-4^2	9
6^2-4^2	20
■	

$\triangle FBE$	$FB = \dots$	$FE = 2$	$BE = 3$
$\triangle DBC$	$DB = \dots$	$DC = \dots$	$BC = 6$

30a Teken de hoogtelijn CE . (zie de figuur hiernaast)

$\triangle AEC$: $AE = \frac{1}{2} AC = 3$ en $CE = AE \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 $\triangle BEC$: $BE = CE = 3\sqrt{3}$

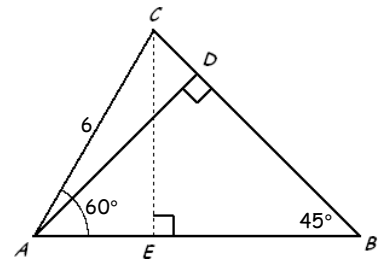
$$\Rightarrow AB = AE + EB = 3 + 3\sqrt{3}.$$

30b $\triangle ABD$: $\angle BAD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

Dus $\angle CAD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

$\triangle ABD$: $\sin 15^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{6} \Rightarrow CD = 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 1,55.$

NORM	SCI	ENG	
FLOAT	0123456789		
RADI			
FUNC	PAR	POL	SEQ
CONNECTED	DOT		
SEQUENCE	6sin(15)		
REAL	1.552914271		
FULL			
SETCL			



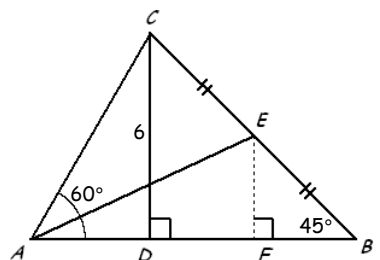
31 $\triangle BDC$: $\angle DCB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ \Rightarrow$ Dus $DB = DC = 6$. (teken $EF \perp AB$)

$\triangle BDC$ is een vergroting van $\triangle BFE$ met factor 2 $\Rightarrow BF = FE = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$

$\triangle ADC$: $AD = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AF = AB - FB = AD + DB - FB = \frac{6}{\sqrt{3}} + 6 - 3 = \frac{6}{\sqrt{3}} + 3.$

$\triangle AFE$: $\tan \angle EAF = \frac{FE}{AF} = \frac{3}{\frac{6}{\sqrt{3}} + 3} \Rightarrow \angle EAF = \angle EAB \approx 25^\circ.$

3/(6/(sqrt(3))+3)	4641016151
tan^-1(Ans)	24.89609064
■	



32 Gebruik figuur 8.23. $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$.

$\triangle BAC$ is een vergroting van $\triangle BED$ met factor 2 ($\angle BDE = \angle BCA$ én $\angle B = \angle B \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BEC$ (hh)) $\Rightarrow EB = \frac{1}{2} AB = 6\frac{1}{2}$.

$AE = AB - EB = 13 - 6\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.

$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow AD^2 = 5^2 + 6^2 = 61 \Rightarrow AD = \sqrt{61}$.

$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC \approx 17^\circ$ (zie de berekening hieronder).

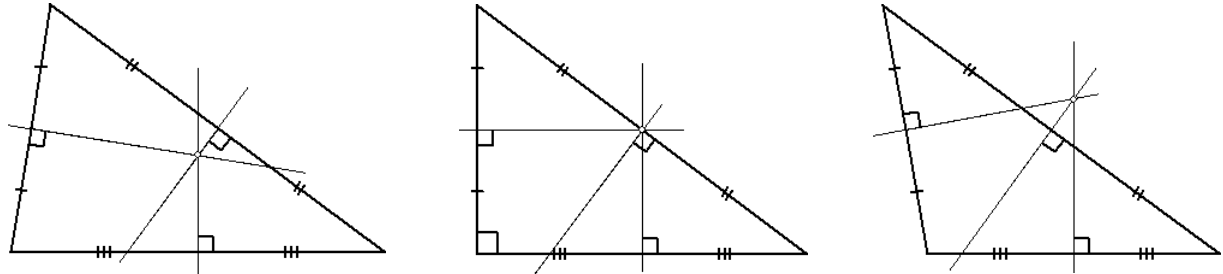
$\triangle BAC$: $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5} \Rightarrow \angle BAC \approx 67^\circ$ en in $\triangle DAC$: $\tan \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \angle DAC \approx 50^\circ$.

$$\begin{array}{r} 5^2+12^2 \\ \sqrt{169} \\ 169 \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5^2+6^2 \\ \sqrt{61} \\ 61 \\ 7.810249676 \end{array}$$

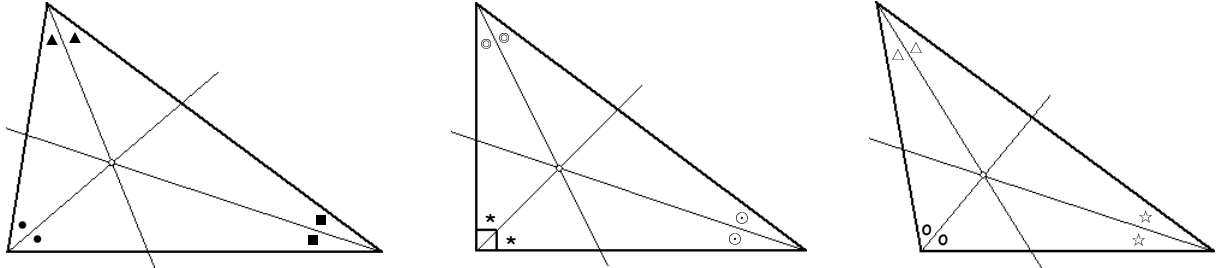
$$\begin{array}{r} \tan^{-1}(12/5) \times X \\ 67.38013505 \\ \tan^{-1}(6/5) \\ 50.19442891 \\ X-Ans \\ 17.18570614 \end{array}$$

33a



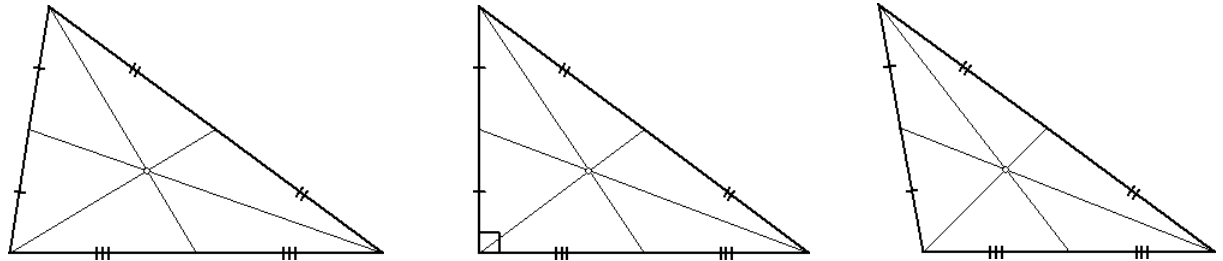
Vermoeden: De drie middelloodlijnen gaan door één punt.

33b



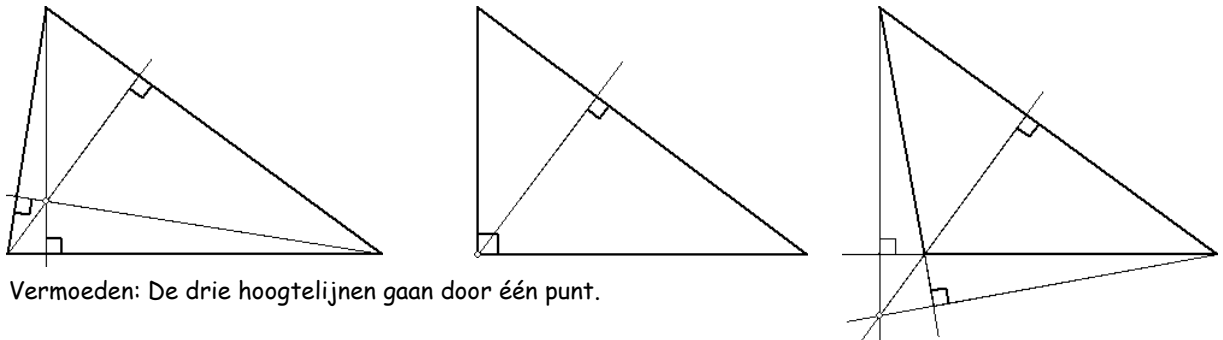
Vermoeden: De drie bissectrices gaan door één punt.

33c



Vermoeden: De drie zwaartelijnen gaan door één punt.

33d



Vermoeden: De drie hoogtelijnen gaan door één punt.

34a Vermoeden: De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt.

34b Vermoeden: De cirkel gaat ook door de andere hoekpunten van de driehoek.

35a Vermoeden: De drie zwaartelijnen in een driehoek gaan door één punt.

35b Vermoeden: De drie hoogtelijnen in een driehoek gaan door één punt.

36a Vermoeden: De drie bissectrices in een driehoek gaan door één punt.

36b Vermoeden: De cirkel raakt ook de andere zijden van de driehoek.

- 37a Vermoeden: De bissectrice van $\angle A$ en de beide buitenbissectrices van de hoeken B en C gaan door één punt.
37b Vermoeden: De cirkel raakt ook de lijnen AB en AC .

38 Vermoeden: De raaklijn aan een cirkel en de straal naar het raakpunt staan loodrecht op elkaar.

39 De cirkel door E , F en G gaat ook door H .

40 Vermoeden: De lijnen CF en DE lopen evenwijdig.

41 Vermoeden: $\angle ACB = 90^\circ$.

42 Vermoeden: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

43 Vermoeden: Het punt C ligt op de cirkel als $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

44 Vermoeden: De drie cirkels gaan door één punt.

45 Vermoeden: Vierhoek $PQRS$ is een parallellogram.

46 Vermoeden: De punten A , B en C liggen op één lijn.

47a
$$\left. \begin{matrix} A=B \\ B=C \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A=C \\ C=D \end{matrix} \right\} \Rightarrow A=D.$$

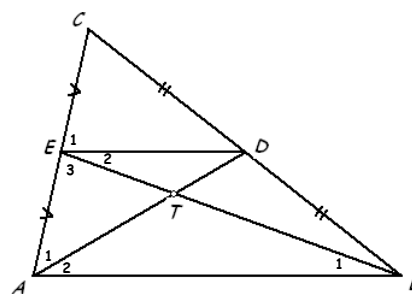
47b
$$\left. \begin{matrix} \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B + \angle C = \angle D.$$

48a AD en BE snijden elkaar in T .
 $\left. \begin{matrix} AC : EC = 2 : 1 \\ BC : DC = 2 : 1 \\ \angle C = \angle C \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC$ (zhz) $\Rightarrow AB : ED = 2 : 1$.

Uit de gelijkvormigheid volgt ook $\angle A_{12} = \angle E_1 \Rightarrow AB \parallel ED$ (F-hoeken).

$\left. \begin{matrix} \angle B_1 = \angle E_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ATB = \angle DTE \text{ (overstaande hoeken)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABT \sim \triangle DET$ (hh).

Ook geldt er $AB : DE = 2 : 1$ dus $BT : ET = 2 : 1$ en $AT : DT = 2 : 1$.



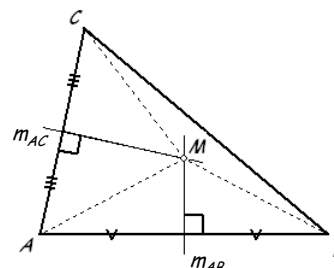
48b In de eerste figuur (voorbeeld blz. 137) is $\triangle ACS \sim \triangle DFS$ en $AC : DF = 2 : 1 \Rightarrow AS : DS = 2 : 1$ en $CS : FS = 2 : 1$.
 In de tweede figuur is $\triangle ABT \sim \triangle DET$ en $AB : DE = 2 : 1 \Rightarrow AT : DT = 2 : 1$ en $BT : ET = 2 : 1$ (zie 48b).
 De punten S en T vallen samen \Rightarrow de drie zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 2 : 1.

49a Gegeven: $\triangle ABC$ en de middelloodlijnen m_{AB} , m_{AC} en m_{BC} . (zie figuur 8.30)
 Te bewijzen: m_{AB} , m_{AC} en m_{BC} gaan door één punt.

49b Bewijs: Zij M het snijpunt van m_{AB} en m_{AC} . (zie de figuur hiernaast)

$\left. \begin{matrix} M \text{ op } m_{AB} \Rightarrow AM = BM \\ M \text{ op } m_{AC} \Rightarrow AM = CM \end{matrix} \right\} \Rightarrow BM = CM \Rightarrow M \text{ op } m_{BC}.$

Hiermee is bewezen dat de drie middelloodlijnen door één punt gaan.



50 Gegeven: $\triangle ABC$ en het snijpunt M de middelloodlijnen van de zijden. (zie de figuur hierboven)
 Te bewijzen: M is het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$, ofwel $MA = MB = MC$.

Bewijs: $\left. \begin{matrix} M \text{ op } m_{AB} \Rightarrow AM = BM \\ M \text{ op } m_{AC} \Rightarrow AM = CM \end{matrix} \right\} \Rightarrow AM = BM = CM.$

Dus M is het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

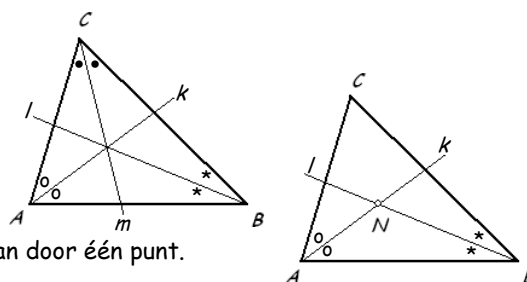
51 Gegeven: $\triangle ABC$ met de bissectrices k , l en m . (zie de figuur hiernaast)

Te bewijzen: De bissectrices k , l en m gaan door één punt.

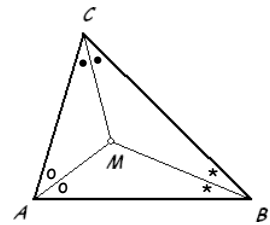
Bewijs: Zij N het snijpunt van k en l . (zie de tweede figuur hiernaast)

$\left. \begin{matrix} N \text{ op } k \Rightarrow d(N, AB) = d(N, AC) \\ N \text{ op } l \Rightarrow d(N, AB) = d(N, BC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(N, AC) = d(N, BC).$

Dus N ligt op de bissectrice m van $\triangle ABC \Rightarrow$ de drie bissectrices gaan door één punt.

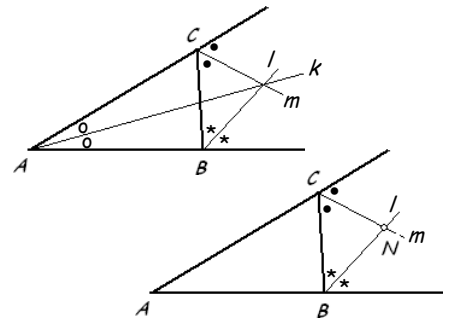


- 52 Gegeven: $\triangle ABC$ met het snijpunt M van de drie bissectrices. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$,
ofwel $d(M, AB) = d(M, AC) = d(M, BC)$.



Bewijs: M op de bissectrice van $\angle A \Rightarrow d(M, AB) = d(M, AC)$
 M op de bissectrice van $\angle B \Rightarrow d(M, AB) = d(M, BC)$ } $\Rightarrow d(M, AB) = d(M, AC) = d(M, BC)$.
 Dus M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

- 53 Gegeven: $\triangle ABC$ met de bissectrices k van $\angle A$, en de buitenbissectrices l en m van de hoeken B en C . (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: De lijnen k , l en m gaan door één punt.



Bewijs: Zij N het snijpunt van l en m . (zie de figuur hiernaast)
 N op $l \Rightarrow d(N, AB) = d(N, BC)$
 N op $m \Rightarrow d(N, BC) = d(N, AC)$ } $\Rightarrow d(N, AB) = d(N, AC)$.
 Dus N ligt ook op de bissectrice van $\angle A \Rightarrow$ de drie lijnen door één punt.

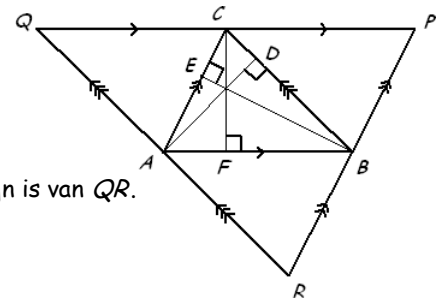
- 54a Zie de figuur hiernaast.

54b
$$\left. \begin{array}{l} CF \perp AB \\ PQ \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow CF \perp PQ$$

$$\left. \begin{array}{l} CQ = AB \\ CP = AB \end{array} \right\} \Rightarrow CQ = CP$$

$$\left. \begin{array}{l} CF \perp PQ \\ CQ = CP \end{array} \right\} \Rightarrow CF \text{ is middelloodlijn van } PQ.$$

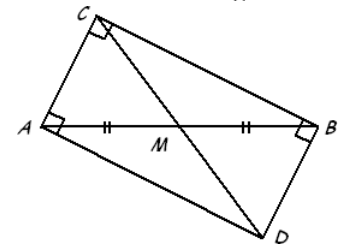
Analoog toon je aan dat BE middelloodlijn is van PR en dat AD middelloodlijn is van QR .
 De hoogtelijnen van $\triangle ABC$ zijn dus de middelloodlijnen van $\triangle PQR$.
 De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt (bewezen in 49b).
 Dus de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ gaan door één punt.



- 55a Gegeven: $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$ en M het midden van AB . (zie de figuur 8.32)
Te bewijzen: $AM = BM = CM$.

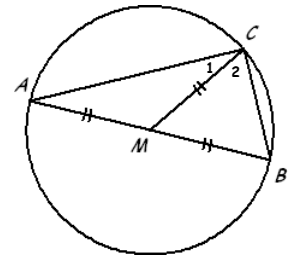
Bewijs: Teken eerst rechthoek $ADBC$ en de diagonalen AB en CD . (zie hiernaast)
 Het snijpunt van de diagonalen is M , want $AM = BM$. ($ADBC$ is ook een parallellogram)

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (ADBC is een rechthoek)} \\ CM = MD = \frac{1}{2} CD \text{ (ADBC is een parallellogram)} \\ AM = BM = \frac{1}{2} AB \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow AM = BM = CM (= DM).$$



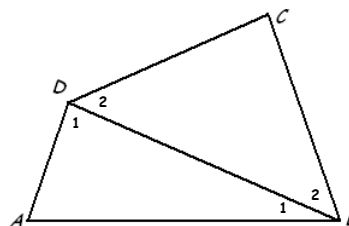
- 55b Gegeven: $\triangle ABC$, zijde AB is middellijn van de cirkel met middelpunt M en C ligt op de cirkel. (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: $\angle C_{12} = 90^\circ$.

Bewijs: $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $AM = CM \Rightarrow \angle A = \angle C_1$ (gelijkbenige driehoek)
 $BM = CM \Rightarrow \angle B = \angle C_2$ (gelijkbenige driehoek) } $\Rightarrow \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ$
 $2 \cdot \angle C_{12} = 180^\circ \Rightarrow \angle C_{12} = 90^\circ$.



- 56 Gegeven: Vierhoek $ABCD$. (zie figuur 8.34)
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.
Bewijs: Teken diagonaal BD . (zie de figuur hiernaast)

$\angle A + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle B_2 + \angle C + \angle D_2 = 180^\circ$ (hoekensom driehoek) } \Rightarrow
 $\angle A + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle B_2 + \angle C + \angle D_2 = 360^\circ$.
 Dus $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

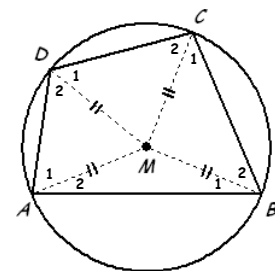


- 57a Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M binnen de vierhoek ligt. (zie figuur 8.35)

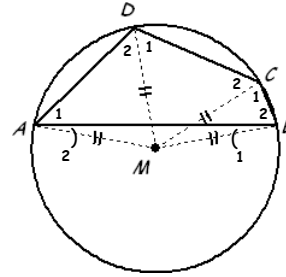
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Bewijs: Teken hiervoor de lijnstukken MA , MB , MC en MD . (zie de figuur hiernaast)

In $\triangle ABM$: $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle BCM$: $\angle C_1 = \angle B_2$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle CDM$: $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle DAM$: $\angle A_1 = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
 $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2$
 ofwel $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) } $\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.



57b Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M buiten de vierhoek ligt. (zie figuur 8.36)



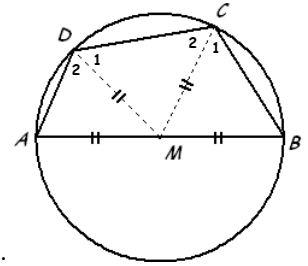
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Bewijs: Teken de lijnstukken MA , MB , MC en MD . (zie de figuur hiernaast)

In $\triangle ABM$: $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)
In $\triangle BCM$: $\angle C_1 = \angle B_{12}$ (gelijkbenige driehoek)
In $\triangle CDM$: $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
In $\triangle DAM$: $\angle A_{12} = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)

$\angle A_{12} - \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_{12} + \angle D_1 + \angle D_2 - \angle B_1$
ofwel $\angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12}$
 $\angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) $\Rightarrow \angle A_1 + \angle C_{12} = 180^\circ$ en $\angle B_2 + \angle D_{12} = 180^\circ$
Dus $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

57c Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M op AB ligt. (zie figuur 8.37)



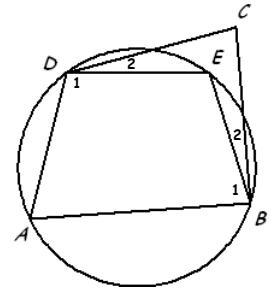
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Bewijs: Teken de lijnstukken MC en MD . (zie de figuur hiernaast)

In $\triangle ADM$: $\angle A = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
In $\triangle BCM$: $\angle C_1 = \angle B$ (gelijkbenige driehoek)
In $\triangle CDM$: $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)

ofwel $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) $\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

58 Gegeven: De cirkel door A , B en D en een punt C buiten de cirkel. (zie de figuur hiernaast)



Te bewijzen: $\angle A + \angle C < 180^\circ$.

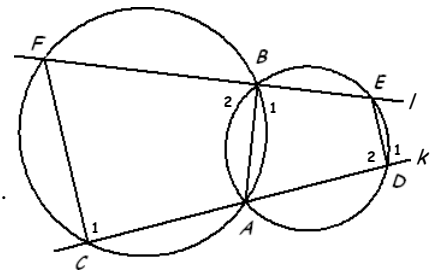
Bewijs: Kies een punt E op de cirkel binnen vierhoek $ABCD$ en teken BE en DE .

$\angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ$ ($ABED$ is een koordenvierhoek)
Dus $\angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ$
 $\angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) $\Rightarrow \angle A + \angle C < 180^\circ$.

59 Gegeven: Twee cirkels die elkaar snijden in A en B .

De lijn k door A snijdt de cirkels ook nog in C en D .

De lijn l door B snijdt de cirkels ook nog in E en F . (zie hiernaast)



Te bewijzen: $CF \parallel DE$.

Bewijs: Trek CF , AB en DE . (zie de figuur hiernaast)

$\angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ ($CABF$ is een koordenvierhoek)
 $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)
 $\angle B_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ ($ADEB$ is een koordenvierhoek)
 $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)

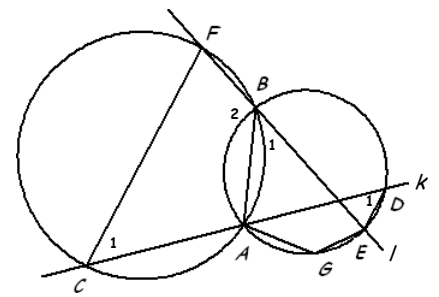
Dus $CF \parallel DE$. (F-hoeken)

60 Vermoeden: Ook in deze situatie is $CF \parallel DE$.

Gegeven: Twee cirkels die elkaar snijden in A en B .

De lijn k door A snijdt de cirkels ook nog in C en D .

De lijn l door B snijdt de cirkels ook nog in E en F , waarbij E tussen A en D ligt. (zie de figuur hiernaast)



Te bewijzen: $CF \parallel DE$.

Bewijs: Teken G op de kleinste boog AE . Teken CF , AB , DE , AG en EG .

$\angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ ($CABF$ is een koordenvierhoek)
 $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)
 $\angle B_1 + \angle G = 180^\circ$ ($AGEB$ is een koordenvierhoek)
 $\angle D_1 + \angle G = 180^\circ$ ($AGED$ is een koordenvierhoek)

Dus $CF \parallel DE$. (Z-hoeken)

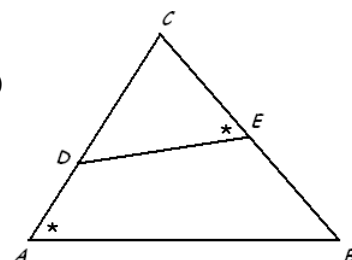
61a Gegeven: Driehoek ABC met DE antiparallel met zijde AB . (zie hiernaast)

Te bewijzen: $ABED$ is een koordenvierhoek.

Bewijs:

$\angle CED + \angle BED = 180^\circ$ (gestrekte hoek)
 $\angle CED = \angle A$ (gegeven)

Dus $ABED$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).



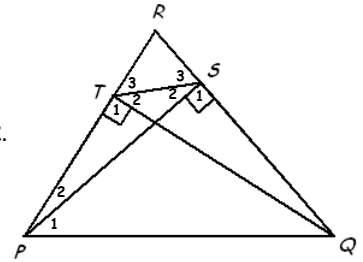
- 61b Gegeven: Driehoek PQR met de hoogtelijnen PS en QT .
Te bewijzen: ST is antiparallel met PQ , ofwel $\angle TPQ = \angle RST$.

Bewijs: Teken ST .

$\angle S_1 = 90^\circ \Rightarrow S$ op cirkel met middellijn PQ (Thales)
 $\angle T_1 = 90^\circ \Rightarrow T$ op cirkel met middellijn PQ (Thales) $\Rightarrow PQST$ is koordenvierhoek.

$\angle P_{12} + \angle S_{12} = 180^\circ$ ($PQST$ is koordenvierhoek)
 $\angle S_{123} = 180^\circ$ (gestrekte hoek) $\Rightarrow \angle P_{12} = \angle S_3$ ($\angle TPQ = \angle RST$).

Dus ST is antiparallel met PQ .



- 62 Gegeven: Driehoek ABC met P op AB , Q op BC en R op AC ,
cirkel c_1 door A , P en R , cirkel c_2 door B , P en Q , cirkel c_3 door C , Q en R . (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: c_1 , c_2 en c_3 gaan door één punt.

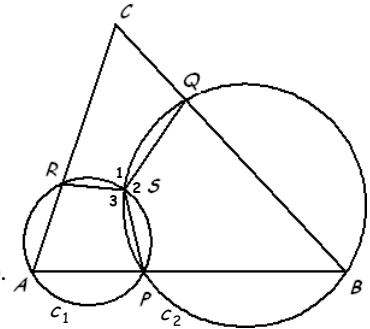
Bewijs: S is het snijpunt van c_1 en c_2 . Teken PS , QS en RS .

$\angle A + \angle S_3 = 180^\circ$ ($APSR$ is koordenvierhoek)
 $\angle B + \angle S_2 = 180^\circ$ ($BQQS$ is koordenvierhoek) $\Rightarrow \angle A + \angle S_3 + \angle B + \angle S_2 = 360^\circ$.

$\angle A + \angle B + \angle S_{23} = 360^\circ$
 $\angle S_{123} = 360^\circ$ (volle hoek) $\Rightarrow \angle A + \angle B = \angle S_1$.

$\angle A + \angle B = \angle S_1$
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (hoekensom driehoek) $\Rightarrow \angle S_1 + \angle C = 180^\circ$.

Dus vierhoek $CQSR$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).
Dus S ligt op de cirkel door C , Q en $R \Rightarrow c_1$, c_2 en c_3 gaan door één punt.



- 63 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de bissectrices die vierhoek $EFGH$ insluiten. (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: $EFGH$ is een koordenvierhoek.

Bewijs:

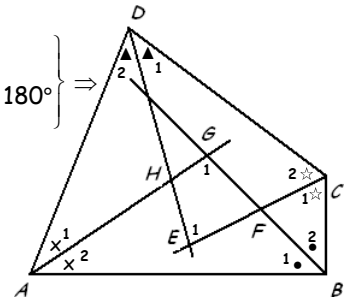
$\angle A_2 + \angle B_1 + \angle G_1 = 180^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle D_1 + \angle C_2 + \angle E_1 = 180^\circ$ (hoekensom driehoek) $\Rightarrow \angle G_1 = 180^\circ - \angle A_2 - \angle B_1$
 $\Rightarrow \angle E_1 = 180^\circ - \angle D_1 - \angle C_2$

$\angle G_1 + \angle E_1 = 180^\circ - \angle A_2 - \angle B_1 + 180^\circ - \angle D_1 - \angle C_2 = 360^\circ - \angle A_2 - \angle B_1 - \angle D_1 - \angle C_2$

$\angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek)
 $\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2, \angle D_1 = \angle D_2$ $\Rightarrow \angle A_2 + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle C_2 = 180^\circ$

$\angle G_1 + \angle E_1 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Dus $EFGH$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).



Diagnostische toets

D1
$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \\ \angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta ACB \text{ (hh)} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta CDB.$$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow AB = 13.$
 $CD = 5 \cdot 12 : 13 = 4 \frac{8}{13}.$

ΔADC	$AD = \dots$	$AC = 5$	$DC = \dots$
ΔACB	$AC = 5$	$AB = 13$	$CB = 12$
ΔCDB	$CD = \dots$	$CB = 12$	$DB = \dots$

```

12^2+5^2
√(169)
169
13
5*12/13
4.615384615
Ans-4+frac
8/13
    
```

D2a
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ want } \frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ABC \text{ (zhz)}.$$

ΔAED	$AE = 1\frac{1}{2}$	$AD = 1$	$ED = \dots$
ΔABC	$AB = 4\frac{1}{2}$	$AC = 3$	$BC = \dots$

D2b
$$\left. \begin{array}{l} \Delta AED \sim \Delta ABC \text{ (zie D2a)} \Rightarrow \angle AED = \angle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \text{ (F-hoeken).} \\ \angle EDF = \angle FBC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DEF = \angle FCB \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta BCF \text{ (hh)}.$$

ΔDEF	$DE = \dots$	$DF = \dots$	$EF = \dots$
ΔBCF	$BC = \dots$	$BF = \dots$	$CF = \dots$

D2c Uit $\Delta DEF \sim \Delta BCF$ (zie D2b) volgt $\frac{DE}{BC} (= \frac{1}{3} \text{ zie D2a}) = \frac{DF}{BF} = \frac{EF}{CF} \Rightarrow BF : DF = 3 : 1.$

D3a
$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle CDE = \angle CAB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEC \text{ (hh)}.$$

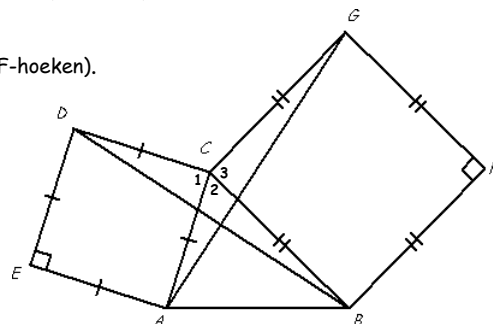
ΔABC	$AB = 7$	$AC = x + 2\frac{1}{2}$	$BC = \dots$
ΔDEC	$DE = 3$	$DC = x$	$EC = \dots$

D3b
$$\frac{7}{3} = \frac{x + 2\frac{1}{2}}{x} \Rightarrow 7x = 3 \cdot (x + 2\frac{1}{2}) \Rightarrow 7x = 3x + 7\frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 7\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\frac{1}{2}}{4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$$

D4
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ADF \sim \Delta ABC \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle AFD = \angle C \text{ (***) en } DF \parallel BC \text{ (F-hoeken).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta BDE \sim \Delta BAC \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle BED = \angle C \text{ en } DE \parallel AC \text{ (F-hoeken).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle AFD = \angle C \text{ (zie ***)} \\ \angle AFD = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle D_2 = \angle C.$$



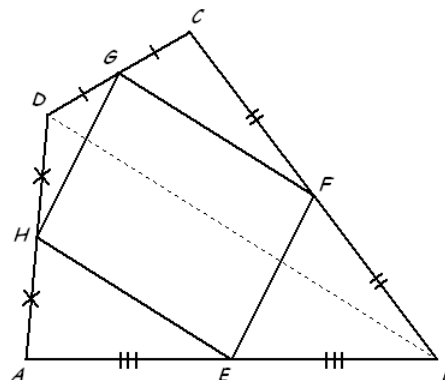
D5
$$\left. \begin{array}{l} \angle C_{12} = \angle C_{23} = 90^\circ + \angle C_2 \\ AC = DC \text{ (EACD is een vierkant)} \\ CG = CB \text{ (CBFG is een vierkant)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ACG \sim \Delta DCB \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AG = BD.$$

D6 Gegeven: De vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$. (zie de figuur hiernaast)
 ($AE = EB, BF = FC, CG = GD$ en $DH = HA$)
 Te bewijzen: $EFGH$ is een parallellogram.
 Bewijs: Teken BD .

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ AE = \frac{1}{2} AB \\ AH = \frac{1}{2} AD \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ABD \text{ (zhz)} \Rightarrow HE = \frac{1}{2} BD$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ CF = \frac{1}{2} CB \\ CG = \frac{1}{2} CD \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta CFG \sim \Delta CBD \text{ (zhz)} \Rightarrow FG = \frac{1}{2} BD$$

$$\left. \begin{array}{l} HE = \frac{1}{2} BD \\ FG = \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow HE = FG.$$

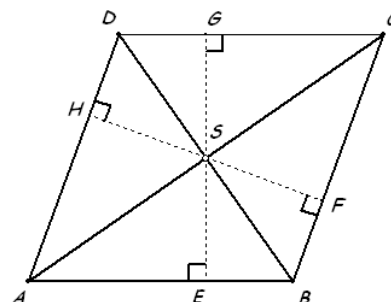


Teken daarna AC en bewijs op dezelfde manier dat $HG = EF$.
 Van vierhoek $EFGH$ zijn twee paar overstaande zijden even lang, dus $EFGH$ is een parallellogram.

D7a Gegeven: Ruit $ABCD$ met snijpunt S van de diagonalen. (zie de figuur hiernaast)
 Te bewijzen: S ligt even ver af van de vier zijden van ruit $ABCD$.
 Bewijs: Teken de loodlijnen uit S op de zijden.

$$\left. \begin{array}{l} SB = SB \\ \angle SBE = \angle SBF \text{ (diagonalen ruit)} \\ \angle SEB = \angle SFB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta SBE \cong \Delta SBF \text{ (ZHH)} \Rightarrow SE = SF.$$

Geheel analoog bewijs je dat $SF = SG$ en $SG = SH$.
 Uit $SE = SF, SF = SG$ en $SG = SH$ volgt nu $SE = SF = SG = SH$.



D7b Als van een vierhoek het snijpunt van de diagonalen even ver van de vier zijden ligt, dan is die vierhoek een ruit.

Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $SE = SF = SG = SH$. (zie de figuur hiernaast)

Te bewijzen: Vierhoek $ABCD$ is een ruit.

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} SE = SF \text{ (gegeven)} \\ BS = BS \\ \angle BES = \angle BFS = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BES \cong \triangle BFS \text{ (ZZR)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2 \text{ en } \angle S_1 = \angle S_2.$$

Analoog bewijs je dat $\angle S_3 = \angle S_4$, $\angle S_5 = \angle S_6$ en $\angle S_7 = \angle S_8$.

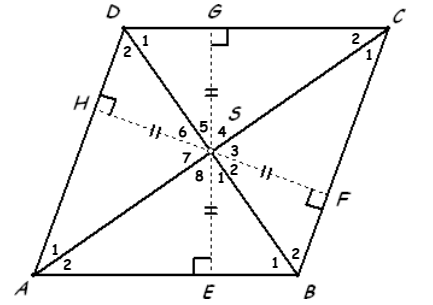
$$\left. \begin{array}{l} \angle S_1 + \angle S_2 + \dots + \angle S_8 = 360^\circ \\ \angle S_1 = \angle S_2, \angle S_3 = \angle S_4, \angle S_5 = \angle S_6 \text{ en } \angle S_7 = \angle S_8 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle S_{23} + \angle S_{67} = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle S_{23} + \angle S_{67} = 180^\circ \\ \angle S_{23} = \angle S_{67} \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle S_{23} = \angle S_{67} = 90^\circ.$$

Dus ook $\angle S_{18} = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} BS = BS \\ \angle S_{23} = \angle S_{18} = 90^\circ \\ \angle B_1 = \angle B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS \text{ (HZH)} \Rightarrow AB = BC.$$

Analoog bewijs je dat $BC = CD$ en $CD = DA \Rightarrow AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD$ is een ruit.



D8a Gegeven: Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD . (zie figuur 8.48)

Te bewijzen: $AC^2 = AD \cdot AB$ en $BC^2 = BD \cdot AB$.

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ACB \text{ (hh)} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB \text{ (zie de tabel).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ (hh)} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot AB \text{ (zie de tabel).}$$

$\triangle ADC$	AD	AC	DC
$\triangle ACB$	AC	AB	CB
$\triangle ACB$	AC	AB	CB
$\triangle CDB$	CD	CB	DB

D8b Gegeven: Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD . (zie figuur 8.48)

Te bewijzen: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Bewijs: $AC^2 = AD \cdot AB$ (stelling van Euclides) en $BC^2 = BD \cdot AB$ (stelling van Euclides).

$$\text{Dus } AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + DB) \cdot AB = AB \cdot AB = AB^2.$$

D9a $\triangle ADC$ (zie figuur 8.49): $AD = \frac{CD}{\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 1\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Dus $AB = AD + DB = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 5$.

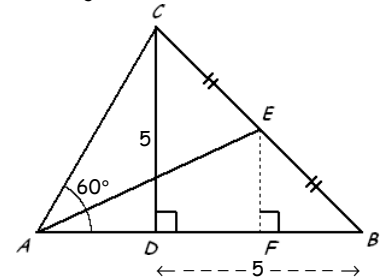
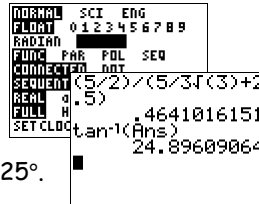
D9b Teken $EF \perp AB$. (zie de figuur hiernaast)

$\triangle BDC$ is een vergroting van $\triangle BFE$ met factor 2.

$$\text{Dus } BF = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \text{ en } EF = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}.$$

$$AF = AD + DF = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + (5 - 2\frac{1}{2}) = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}.$$

$$\triangle AFE: \tan \angle FAE = \frac{FE}{AF} = \frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}} \Rightarrow \angle FAE = \angle BAE \approx 25^\circ.$$



D10 Vermoeden: $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.

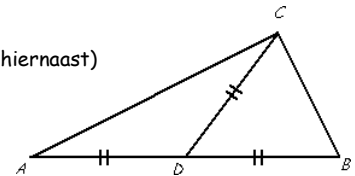
D11 Vermoeden: $CE = DF$.

D12 Gegeven: Driehoek ABC , waarbij zwaartelijn CD de helft is van AB . (zie de figuur hiernaast)

Te bewijzen: $\angle ACB = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bewijs: } D \text{ is het midden van } AB \\ CD = \frac{1}{2} AB \end{array} \right\} \Rightarrow AD = BD = CD.$$

AB is middellijn van de cirkel die door C gaat $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales).



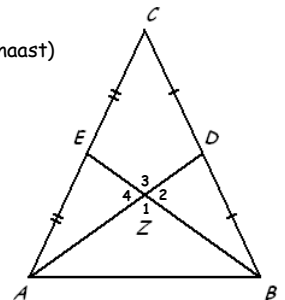
D13 Gegeven: Driehoek ABC met de zwaartelijnen AD en BE zo, dat $AD = BE$. (zie de figuur hiernaast)

Te bewijzen: Driehoek ABC is gelijkbenig.

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} AZ = \frac{2}{3} AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ BZ = \frac{2}{3} BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ DZ = \frac{1}{3} AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ EZ = \frac{1}{3} BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ AD = BE \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AZ = BZ \text{ en } EZ = DZ \\ \angle Z_2 = \angle Z_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AZE \cong \triangle BZD \text{ (ZHZ).}$$

$$\left. \begin{array}{l} AE = BD \\ AE = \frac{1}{2} AC \\ BD = \frac{1}{2} BC \end{array} \right\} \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \triangle ABC \text{ is gelijkbenig.}$$



D14 Gegeven: Koordenvierhoek $ABCD$ met de lijnen AB en CD die elkaar snijden in P en de lijnen AD en BC die elkaar snijden in Q . (gebruik figuur 8.50)

Te bewijzen: $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle BCD = 180^\circ \text{ (koordenvierhoekstelling)} \\ \angle BCD = \angle PCQ \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle PCQ = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CPQ + \angle CQP + \angle PCQ = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CPQ + \angle CQP = \angle A.$$

D15 Gegeven: Vierkant $ABCD$ met E op BC en F op CD zo, dat $CE = DF$.
Het snijpunt van AF en DE is G . (zie de figuur hiernaast)

Te bewijzen: $ABEG$ is een koordenvierhoek.

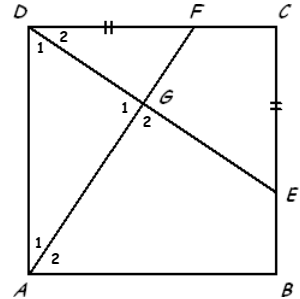
Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle D_2 = 90^\circ \\ CE = DF \text{ (gegeven)} \\ DC = AD \text{ (vierkant)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CED \cong \triangle DFA \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle D_2 = \angle A_1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ \\ \angle D_2 = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle D_1 + \angle A_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle G_1 = 90^\circ \text{ (de hoeken in } \triangle AGD \text{ zijn samen } 180^\circ).$$

$$\angle G_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle G_2 = 180^\circ - \angle G_1 \text{ (gestrekte hoek)} = 90^\circ.$$

Dus $\angle B + \angle G_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow ABEG$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).



Gemengde opgaven 8. Vermoedens en bewijzen

G40a $\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BCE \text{ (hh)} \Rightarrow AC \cdot CE = BC \cdot CD.$

G40b $\left. \begin{array}{l} \angle AFE = \angle BFD \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle AEF = \angle BDF = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle BDF \text{ (hh)} \Rightarrow AF \cdot DF = BF \cdot EF.$

$\triangle ACD$	$AC = \dots$	$AD = \dots$	$CD = \dots$
$\triangle BCE$	$BC = \dots$	$BE = \dots$	$CE = \dots$

$\triangle AEF$	$AE = \dots$	$AF = \dots$	$EF = \dots$
$\triangle BDF$	$BD = \dots$	$BF = \dots$	$DF = \dots$

G41a \square *

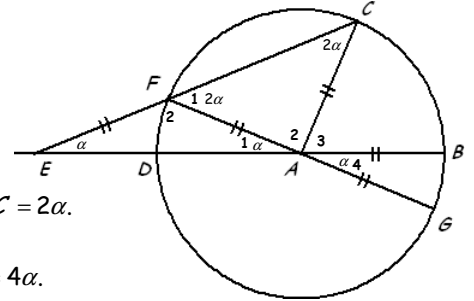
G41b \square Stel $\angle E = \alpha$. (zie de figuur hiernaast)

$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle A_1 \text{ (} EF = AF \text{)} \\ \angle E = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1 = \alpha$
 $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_4 = \alpha.$

$\left. \begin{array}{l} \angle E + \angle A_1 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle F_{12} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle F_1 = \angle E + \angle A_1 = 2\alpha$
 $\left. \begin{array}{l} \angle F_1 = \angle C \text{ (} AF = AC \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle C = 2\alpha.$

$\left. \begin{array}{l} \angle C + \angle A_2 + \angle F_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A_{234} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAG = \angle A_{34} = \angle C + \angle F_1 = 4\alpha.$

G41c \square $\angle A_{34} = 4\alpha$ (zie G41b) én $\angle A_4 = \alpha$ (zie G41b) $\Rightarrow \angle A_3 = 3\alpha$. Dus $\angle E = \frac{1}{3} \angle BAC$.



G42a \square Vermoeden: De baan van N is een cirkel met middellijn AM .

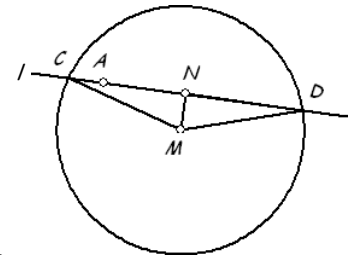
G42b \square Gegeven: Cirkel met middelpunt M en een punt A binnen de cirkel.

De lijn l door A snijdt de cirkel in C en D . Het midden van CD is N .

Te bewijzen: N ligt op de cirkel met middellijn AM .

Bewijs:

$\left. \begin{array}{l} NC = ND \\ MN = MN \\ MC = MD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MCN \cong \triangle MDN \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle MNC = \angle MND$
 $\left. \begin{array}{l} \angle MNC + \angle MND = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MNC = \angle MND = 90^\circ.$
 $\angle MNA = \angle MNC = 90^\circ$ (M en A liggen vast) $\Rightarrow N$ op de cirkel met middellijn AM (Thales).



G43a \square Vermoeden: $PQRS$ is een parallellogram.

G43b \square Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de diagonalen AC en BD .

P is het midden van AB , Q het midden van AC , R het midden van CD en S het midden van BD .

P , Q , R en S liggen niet op één lijn. (zie de figuur hiernaast)

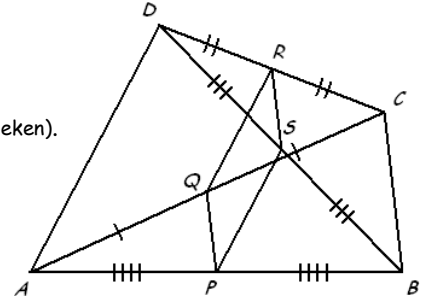
Te bewijzen: $PQRS$ is een parallellogram.

Bewijs:

$\left. \begin{array}{l} \angle QCR = \angle ACD \\ \frac{CQ}{CA} = \frac{CR}{CD} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CRQ \sim \triangle CAD \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle CRQ = \angle CAD \Rightarrow QR \parallel AD \text{ (F-hoeken)}.$

Analoog bewijs je dat $PS \parallel AD$, $RS \parallel BC$ en $QP \parallel BC$.

$\left. \begin{array}{l} QR \parallel AD \\ PS \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow QR \parallel PS$
 $\left. \begin{array}{l} RS \parallel BC \\ QP \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow RS \parallel QP$
 $\Rightarrow PQRS$ is een parallellogram.



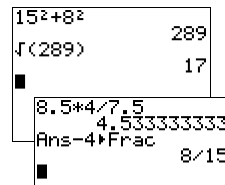
G44 \square $\left. \begin{array}{l} \angle DEC = \angle BEF \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle EDC = \angle EBF = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EDC \sim \triangle EBF \text{ (hh)}.$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow BC = 17.$

$\triangle ABC$ is een vergroting van $\triangle DEC$ met factor 2.

Dus $DE = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7\frac{1}{2}$ en $CE = EB = \frac{1}{2} \cdot 17 = 8\frac{1}{2}.$

$BF = 8\frac{1}{2} \cdot 4 : 7\frac{1}{2} = 4\frac{8}{15}.$



$\triangle EDC$	$ED = \dots$	$EC = \dots$	$DC = 4$
$\triangle EBF$	$EB = \dots$	$EF = \dots$	$BF = \dots$
$\triangle EDC$	$ED = 7\frac{1}{2}$	$EC = 8\frac{1}{2}$	$DC = 4$
$\triangle EBF$	$EB = 8\frac{1}{2}$	$EF = \dots$	$BF = \dots$

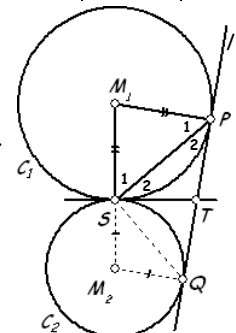
G45a \square Gegeven: Gegeven de cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 die elkaar raken in S .

l raakt c_1 in P en c_2 in Q . De gemeenschappelijke raaklijn in S snijdt PQ in T .

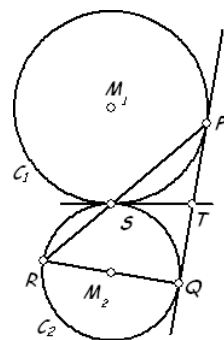
Te bewijzen: P, Q en S liggen op één cirkel met middelpunt T .

Bewijs: Teken eerst PS , M_1P en M_2S . (zie de figuur hiernaast)

$\left. \begin{array}{l} \angle P_{12} = \angle S_{12} = 90^\circ \text{ (raaklijn)} \\ \angle P_1 = \angle S_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle P_2 = \angle S_2 \Rightarrow TP = TS \text{ (gelijkbenige driehoek)}.$



Op soortgelijke manier als je bewijst dat $TP = TS$ bewijs je ook dat $TS = TQ$.
Dus $TP = TS = TQ \Rightarrow P, Q$ en S liggen op de cirkel met middelpunt T .



G45b \square Gegeven: Zie G45a. (gebruik de figuur van G45a)

Te bewijzen: $STPM_1$ is een koordenvierhoek.

Bewijs: $\angle P_{12} = \angle S_{12} = 90^\circ$ (raaklijn) $\Rightarrow \angle P_{12} + \angle S_{12} = 180^\circ$.

Dus $STPM_1$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

G45c \square Gegeven: Zie G45a en verder is QR een middellijn van c_2 . (gebruik de figuur hiernaast)

Te bewijzen: P, S en R liggen op één lijn.

Bewijs: Uit G45a volgt dat S op de cirkel met middellijn PQ .

Dus $\angle PSQ = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales)

QR is middellijn $\Rightarrow \angle RSQ = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales) $\Rightarrow \angle PSR = 180^\circ$. Dus P, S en R liggen op één lijn.

G46 \square Gegeven: $l_1 \parallel l_3$, $\angle A_1 = \angle A_3$ en $\angle B_1 = \angle B_3$. (zie de figuur hiernaast)

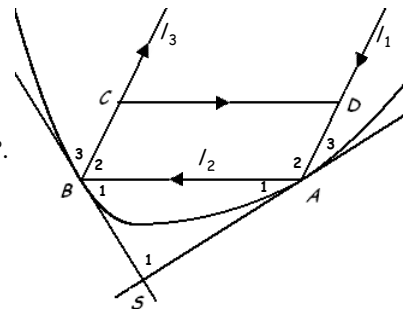
Te bewijzen: $\angle S_1 = 90^\circ$

Bewijs: Teken $CD \parallel AB \Rightarrow ABCD$ is een parallellogram.

$\left. \begin{array}{l} \angle A_2 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (zonder bewijs te gebruiken)} \\ \angle A_{123} + \angle B_{123} = 360^\circ \text{ (twee gestrekte hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_3 + \angle B_1 + \angle B_3 = 180^\circ$.

$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle A_3 + \angle B_1 + \angle B_3 = 180^\circ \\ \angle A_1 = \angle A_3 \text{ en } \angle B_1 = \angle B_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ$.

$\angle S_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (hoekensom driehoek).



G47a \square De middelpunten liggen op lijn AB , want de cirkels raken c in A .

De middelpunten liggen ook op de bissectrices van k en $l \Rightarrow$ construeer de bissectrices van k en l .

(de cirkels raken k en $l \Rightarrow$ de middelpunten van de cirkels hebben gelijke afstanden tot k en l)

De middelpunten zijn de snijpunten van deze bissectrices met de lijn door A en B .

G47b \square Gebruik figuur G.31: $\angle BDA = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales) $\Rightarrow \angle PDA = 90^\circ$ (gestrekte hoek).

$\angle A_{12} = 90^\circ$ (raaklijn).

$\angle M_2 = 180^\circ - \angle M_1 = 180^\circ - x$ (gestrekte hoek).

$\angle A_2 = 180^\circ - \angle PDA - \angle APD = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x$ (hoekensom driehoek).

$\angle A_1 = 90^\circ - \angle A_2 = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$ (rechte hoek).

$\angle S_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle M_1 = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x$ (hoekensom driehoek).

$\angle S_2 = 180^\circ - \angle S_1 = 180^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x$ (gestrekte hoek).

$\angle P_1 = 180^\circ - \angle A_{12} - \angle M_1 = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x$ (hoekensom driehoek).

$\angle B = 180^\circ - \angle A_{12} - \angle BPA = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x$ (hoekensom driehoek).

G47c \square Gegeven: Zie figuur G.31.

Te bewijzen: $AS = PS = MS$.

Bewijs:

$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle M_1 \text{ (zie G47b)} \Rightarrow \triangle AMS \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AS = MS \\ \angle P_1 = 90^\circ - \angle M_1 \text{ (zie G47b)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APS \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AS = PS$

$\left. \begin{array}{l} \angle A_2 = 90^\circ - \angle M_1 \text{ (zie G47b)} \end{array} \right\} \Rightarrow AS = PS = MS$.

G48 \square $PCQS$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle PSQ + \angle PCQ = 180^\circ \Rightarrow \angle PSQ = 180^\circ - \angle PCQ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$PSAB$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle PSA + \angle ABP = 180^\circ \Rightarrow \angle PSA = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\angle ASQ = \angle PSQ + \angle PSA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow S$ ligt op AQ .

G49a \square Vermoeden: De omschreven cirkel van $\triangle ABD$ gaat door de raakpunten van c_1 en c_3 en c_2 en c_3 .

G49b \square Gegeven: Zie figuur G.34.

Te bewijzen: $ABDE$ is een koordenvierhoek.

Bewijs: Teken de lijnstukken AE en BD .

$M_1A = M_1E \Rightarrow \triangle M_1AE$ is gelijkbenig $\Rightarrow \angle M_1AE = \angle M_1EA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle M_1)$

$M_1B = M_1D = (\text{straal } c_1) + d \Rightarrow \triangle M_1BD$ is gelijkbenig $\Rightarrow \angle M_1BD = \angle M_1DB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle M_1)$ \Rightarrow

$\angle M_1AE = \angle M_1EA = \angle M_1BD = \angle M_1DB$.

$\angle M_1EA + \angle AED = 180^\circ \Rightarrow \angle M_1BD + \angle AED = 180^\circ \Rightarrow ABDE$ is een koordenvierhoek.

G49c \square $ABDE$ is een koordenvierhoek (bewezen in G49b) $\Rightarrow E$ op de cirkel door A, B en D .

$ABCD$ is een koordenvierhoek (bewijs zoals bij G49b) $\Rightarrow C$ op de cirkel door A, B en D .

Dus A, B, C, D en E liggen op één cirkel (de omschreven cirkel van $\triangle ABD$).